GEOMETRIA NON EUCLIDEA. - Si usa dare il nome di « g. non e. » in senso stretto alle geometrie che negano il postulato euclideo delle parallele; in senso più largo alle geometrie (e quindi a sistemi scientifici coerenti) che abbiano tratto origine dalle discussioni e ricerche plurisecolari attorno a quel postulato e si svolgano in modo indipendente da esso (e da proposizioni ad esso equivalenti).

SOMMARIO : I. Cenni storici. - II. Indirizzi espositivi : 1. *Indirizzo elementare*. - 2. *Indirizzo differenziale*. - 3. *Indirizzo proiettivo*. - III. Problemi logici. - IV. Assiomatica.

I. CENNI STORICI. – È noto che Euclide all'inizio dei suoi *Elementi* enunzia varie proposizioni che non dimostra; tali proposizioni sono di tre tipi : *a*) i termini (ὅροι); *b*) le nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι); *c*) i postulati (αἰτήματα). I « termini » corrispondono press'a poco a quelle che oggi vengono chiamate « definizioni »; potrebbero dirsi proposizioni introduttive ed esplicative dei termini usati; p. es. « linea è una lunghezza senza larghezza ». Le « nozioni comuni » corrispondono a proposizioni che oggi verrebbero chiamate « assiomi »; enunciati che sono di immediata evidenza: p. es. « due cose uguali ad una terza sono uguali tra loro ». Più controversa è l'interpretazione del significato che i postulati potevano avere per Euclide e la determinazione delle ragioni per cui essi vengono da lui distinti dalle « nozioni comuni ». Appare probabile il far risalire la distinzione euclidea dei postulati dalle nozioni comuni al fatto che i primi hanno un contenuto geometrico e partecipano di una specie di evidenza (sensibile), che è in certo modo diversa (e minore) dall'evidenza degli assiomi che vengono enunciati come verità necessarie ed indimostrabili, evidenti per la sola comprensione del significato dei termini.

I postulati enunciati da Euclide sono i seguenti : 1) da un punto qualunque si può condurre una retta ad ogni altro punto; 2) ogni linea retta terminata si può prolungare continuamente per diritto; 3) si può descrivere un cerchio con ogni centro ed ogni raggio; 4) tutti gli angoli retti sono eguali; 5) se una retta, incontrando altre due rette, forma con esse da una stessa parte angoli interni la cui somma sia minore di due (angoli) retti, quelle due rette, prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte da cui stanno gli angoli la cui somma è minore di due (angoli) retti.

Si fanno risalire al sec. I a. C. i primi tentativi per dimostrare quest'ultima proposizione, ritenuta « poco evidente » o per sostituire ad essa un'altra proposizione « più evidente »; tali tentativi sono riferiti da Proclo (sec. V d. C.). Ebbe così inizio nell'antichità classica una serie di ricerche (potremmo dire addirittura una « questione del V postulato ») che ebbero il loro pieno compimento soltanto nel sec. XIX e furono fecondissime di risultati diretti ed indiretti (e naturalmente anche di innumerevoli errori), sia per la matematica sia per le altre scienze, perché furono causa od occasione di una analisi critica che si estese ai principî, ai metodi ed ai risultati della matematica e delle scienze affini.

Prima di riferire brevemente sui tentativi fatti durante i secoli per dimostrare il V postulato, diamo qui vari esempi di postulati che sono equivalenti al V di Euclide, nel senso che questo può esser dedotto da ognuno di essi in un sistema geometrico che segua abbastanza da vicino la trattazione euclidea: 1) per un punto fuori di una retta si può condurre a questa una ed una sola parallela; 2) due rette parallele sono ovunque equidistanti; 3) esiste un triangolo simile ad un triangolo dato ed avente grandezza arbitraria; 4) il luogo dei punti di un piano aventi da un data retta distanza assegnata è ancora una retta; 5) la somma degli angoli interni di un triangolo vale due (angoli) retti.

Abbiamo visto che i primi tentativi di dimostrazione risalgono alla matematica greca; altri tentativi si trovano nella matematica araba. Un importante tentativo più vicino a noi si ebbe con J. Wallis (sec. XVII), il quale postulò l'esistenza di un triangolo simile ad un triangolo dato ed avente grandezza arbitraria, movendo da considerazioni che assumevano la « forma » di una figura come una qualità di essa indipendente dalla sua « grandezza ».

La questione fu poi impostata in modo del tutto originale da Girolamo Saccheri (1667-1733), che tentò la dimostrazione del V postulato per assurdo; precisamente egli assunse per ipotesi delle proposizioni che equivalevano alla negazione del V postulato e ne dedusse una catena di conclusioni mediante le quali credette di giungere all'assurdo. Benché egli fallisca nella parte finale, la catena di teoremi che egli deduce costituisce il primo « corpus » di g. non e. che si presenti nella storia.

Un'impostazione abbastanza analoga troviamo in Lambert (sec. XVIII); e dello stesso problema si interessarono anche i grandi matematici francesi dell'epoca che sta tra la seconda metà del sec. XVIII e la prima metà del XIX; tra gli altri va ricordato in modo particolare il Legendre. Va notato tuttavia che fino a questa epoca non appare ben chiara ai matematici la possibilità di una g. non e. come corpo coerente di dottrina; benché in ogni caso la dimostrazione per via diretta del V postulato abbia sempre richiesto l'introduzione (esplicita o no) di altri postulati, non sembra che qualcuno sia arrivato a pensare che esso fosse indipendente dai precedenti. Questa conquista si deve alla matematica del sec. XIX.

Si sa che C. F. Gauss era in possesso di risultati analoghi a quelli ottenuti dai fondatori della g. non e. Press'a poco allo stesso punto erano giunti F. K. Schweikart e F. A. Taurinus; vengono tuttavia considerati come fondatori della g. non e. N. I. Lobačevskij e J. Bólyai. Essi, indipendentemente l'uno dall'alto, costruiscono nelle loro pubblicazioni una « pangeometria » (Lobačevskij) ed una « geometria assoluta » (Bólyai), che sono sistemi di g. non e. Infine la questione dell'indipendenza del V postulato venne chiusa sulla fine del sec. XIX in seguito alle ricerche di geometria differenziale (Beltrami) e di geometria proiettiva (Cayley), che permisero di interpretare gli enti ed i teoremi delle g. non e. mediante enti e teoremi di sistemi logici coerenti e quindi di dissipare ogni dubbio sull'intima coerenza logica delle g. non e.

II. INDIRIZZI ESPOSITIVI. – Gli indirizzi secondo i quali si usa esporre una g. non e. sono di tre tipi : *elementare, differenziale, metrico-proiettivo.*

1. *Indirizzo elementare.* – Abbiamo visto che enunciare il postulato euclideo delle parallele equivale ad affermare che in un piano e per un dato punto P esiste una unica parallela ad una data retta r (giacente nel piano stesso). Pertanto le proposizioni che negano tale postulato possono essere di due tipi : *a*) quelle che affermano che per P passa più di una parallela alla retta r; si ottiene così la cosiddetta « geometria iperbolica »; *b*) quelle che affermano che non esiste parallela per P, cioè che tutte le rette per P incontrano la r; si ottiene così la cosiddetta « geometria ellittica ». Sta di fatto che la scelta della prima alternativa permette una trattazione che è in certo senso più vicina alla trattazione euclidea rispetto a quella a cui conduce la scelta della seconda alternativa, la quale porta poi ad una contraddizione col postulato II (della indefinita prolungabilità della retta).

Immaginiamo per ora di esserci posti nel caso *a*). Si consideri dunque una retta r ed un punto P fuori di essa. Per maggior chiarezza immaginiamo tracciata la perpendicolare h dal punto P alla r e sia H il suo piede. Tra le rette per P ve ne sono ora di due specie : le rette secanti la r (p. es. la h) e le non secanti (p. es. la perpendicolare alla h per P, che, nel caso euclideo, ci darebbe la unica parallela per P alla r). Si può dimostrare che le rette delle due specie sono separate da due rette, le quali vengono chiamate le parallele per P alla r, in ognuno dei due opposti versi che possono venir assegnati sulla r stessa.

Ci limitiamo qui ad enunciare qualcuna delle conseguenze più importanti della introduzione di un postulato cosiffatto : *a*) la somma degli angoli di un triangolo non vale più due retti (come nella geometria euclidea) ma è minore di tale quantità, e tanto minore quanto più il triangolo è grande; *b*) non vale il teorema di Talete e quindi nessuna delle sue conseguenze, quindi non esistono poligoni simili che non siano uguali : cioè non è possibile separare la « forma » di un poligono dalla sua « grandezza », o, in altre parole, non è possibile ingrandire od impicciolire un poligono mantenendogli la stessa forma; quindi vengono a cadere le considerazioni che si fanno per la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio e la costante π perde il suo significato di rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella di un suo diametro; *c*) non vale la trigonometria piana ordinaria. Tuttavia le formule di questa possono essere ottenute con opportuni passaggi al limite.

L'enunciazione di un postulato di tipo *b*) conduce, come abbiamo avvertito, ad una contraddizione con il postulato II di Euclide; tuttavia rinunciando ad enunciare quest'ultimo si ottiene ugualmente un sistema coerente di proposizioni. Naturalmente anche nella geometria ellittica si hanno dei teoremi che la distaccano dalla ordinaria geometria euclidea: a parte il fatto che la retta qui viene ad avere il comportamento di una linea chiusa (analoga alla circonferenza) si ha che anche qui non vale il teorema di Talete e quindi non si hanno figure simili che non siano uguali. Inoltre la somma degli angoli interni di un poligono presenta ora un eccesso rispetto alla corrispondente somma degli angoli di un poligono euclideo avente lo stesso numero di lati, e l'eccesso è proporzionale all'area del poligono.

2. *Indirizzo differenziale.* – Questa impostazione dei principî della geometria trae origine dalle ricerche del Riemann che estese alle varietà tridimensionali le ricerche del Gauss relative alla geometria differenziale delle superfici. Sostanzialmente l'impostazione della geometria dello spazio a tre dimensioni viene fatta in due passi fondamentali: il primo consiste nell'istituire una geometria « in piccolo », cioè nell'intorno di un punto P qualunque. A tal fine si stabilisce un qualunque sistema di coordinate, per cui al punto P viene a corrispondere una terna di numeri $x_1\ x_2\ x_3$, e si assegnano le leggi per misurare gli angoli di due direzioni qualunque uscenti da P e la distanza tra P ed un punto P' ad esso infinitamente vicino, e perciò avente coordinate $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$. Si dimostra che queste due operazioni sono possibili quando si assegni in ogni punto P una espressione differenziale di secondo grado (forma differenziale quadratica), che dà il quadrato ds^2 della distanza tra P e P' e viene chiamata la « metrica » dello spazio. Il secondo passo viene fatto assegnando la legge secondo la quale si può confrontare la geometria nell'intorno di un punto P con quella dell'intorno di un altro punto qualunque Q; questa legge, detta legge di trasporto per « parallelismo di Levi-Civita », è pure nota quando sia data la « metrica » dello spazio e permette di definire nel punto Q quella direzione che è da chiamarsi parallela ad una direzione assegnata per P. Si costruiscono di conseguenza delle linee che vengono chiamate « geodetiche » dello spazio, le quali hanno la proprietà di avere in ogni punto la stessa direzione, il che le fa analoghe alle rette della geometria euclidea.

Siamo qui di fronte ad una impostazione che è sostanzialmente diversa da quella classica. Non avrebbe qui senso enunciare un postulato sul tipo di quello delle parallele, perché le proprietà dello spazio intero vengono qui dedotte da quelle delle regioni ristrette di esso; in forma poco precisa ma espressiva si potrebbe dire che l'intero spazio è costruito per giustapposizione, con determinate leggi, delle regioni infinitesime. Le geometrie che si ottengono in tal modo dipendono dal come si assegna in ogni punto la « metrica » dello spazio e perciò in certo senso sono largamente arbitrarie. Scegliendo in modo particolare la « metrica » si possono ottenere tanto la geometria euclidea quanto le non euclidee viste finora. E tutte risultano come casi particolari di un tipo di geometria che è molto più generale di esse. D'altra parte l'impostazione fondamentalmente analitica di una trattazione geometrica cosiffatta permette di assicurare l'intrinseca coerenza delle g. non e. in quanto l'assenza di contraddittorietà in loro è assicurata dalla analoga proprietà posseduta dall'analisi matematica che fornisce per così dire lo scheletro all'impostazione.

3. *Indirizzo proiettivo.* – In questo ordine di idee si procede così: si costruisce anzitutto la geometria proiettiva, scienza che studia le proprietà delle figure dello spazio che risultano invarianti per operazioni di proiezione. Si dimostra che la geometria proiettiva può esser costruita senza enunciare postulati relativi alle parallele. Si costruiscono poi, mediante gli enti di questa geometria, delle immagini degli enti della geometria euclidea e delle g. non e. (ellittica ed iperbolica). Anche qui la geometria euclidea viene ottenuta come caso particolare delle altre due e di un sistema geometrico più vasto.

III. Problemi logici. – Il problema che venne in ogni epoca considerato fondamentale in relazione alle g. non e. è quello della loro « verità » o « validità ». In particolare ci si domanda se e come si può essere sicuri che non si troverà mai un assurdo comunque si spinga lontano la catena di deduzioni che partono dai postulati ammessi. Il che è lo stesso che domandarsi se il V postulato è indipendente dagli altri. Invero se il V fosse dimostrabile (cioè non indipendente) non dovrebbe più esser chiamato postulato, ma teorema e verrebbe virtualmente affermato qualora si affermassero i primi quattro; allora l'enunciazione dei primi quattro postulati e di una negazione del V porterebbe ad una contraddizione.

Nell'ordine di idee della matematica moderna questa questione viene impostata come segue: ogni teoria matematica può esser considerata, in modo del tutto astratto, come un insieme di proposizioni (teoremi) che legano i concetti riguardanti certi enti primitivi (cioè non definiti) e sono dedotte da altre proposizioni che vengono poste senza dimostrazione (postulati). I concetti degli enti primitivi, p. es. in una geometria i concetti di « punto » « retta » « piano » e le relazioni fondamentali che li legano (postulati), possono essere stati ottenuti per astrazione dall'esperienza o suggeriti da questa. Ma ciò non è affatto necessario per la validità logica dei teoremi, validità che consiste soltanto nella loro coerente deduzione dai postulati ammessi.

Di importanza fondamentale è dunque la questione di decidere se questi ultimi sono compatibili (cioè se formano un sistema esente da contraddizioni interne) e indipendenti (cioè che non esista nessun postulato P che sia deducibile da quelli che lo precedono). Questa seconda questione si riconduce alla precedente perché, come abbiamo già detto, il fatto che P sia indipendente dai postulati che lo precedono equivale a quello che la negazione di P sia compatibile con essi.

Una via per constatare la compatibilità di un sistema di postulati è quella che conduce a trovare una « immagine » del sistema stesso, cioè una interpretazione degli enti primitivi e dei postulati che li legano mediante enti e relazioni della realtà o di un altro sistema scientifico (del quale si supponga già provata l'interiore coerenza logica). Si tratta, per così dire, di dare un « contenuto » ai concetti ed ai postulati, rimasti fino ad un certo punto « vuoti »; e ciò si ottiene ponendo una corrispondenza biunivoca tra questi enti ed altri, appartenenti ad altri sistemi di coerenza interiore assicurata. Così si può porre una corrispondenza biunivoca tra i punti e le rette di un piano π in cui vale la geometria ellittica e le rette ed i piani di una « stella » S. Il che vale ad assicurare l'assenza di contraddizione della geometria ellittica del piano, almeno fino a quando è assicurata quella della geometria della stella nello spazio euclideo. Oppure (nell'indirizzo differenziale) si possono mettere in corrispondenza biunivoca gli enti della geometria con quelli forniti dall'analisi matematica, che si suppone al riparo da ogni dubbio per quanto riguarda i suoi fondamenti; oppure infine (nell'indirizzo proiettivo) si mettono in corrispondenza gli enti di una g. non e. con quelli della geometria proiettiva, che è stata costruita senza far ricorso agli enunciati che si tratta di esaminare. In questo senso alla questione che riguarda la « verità » o « validità » delle g. non e. è stata data risposta pienamente affermativa. La questione poi che riguarda la geometria dello spazio reale o fisico, dello spazio in cui viviamo ed avvengono i fenomeni della vita quotidiana, il decidere cioè quale sia la teoria astratta che meglio si presta ad inquadrare la realtà fisica non è (in questo ordine di idee) di competenza della geometria.

IV. Assiomatica. – La tendenza a raggiungere una astrazione sempre maggiore nelle teorie matematiche in genere, ha dato origine alle impostazioni assiomatiche della matematica in generale e della geometria in particolare. Impostazioni che sono state rese necessarie dall'enorme lavoro critico, reso a sua volta indispensabile dalla esistenza di questioni secolari e difficili (molte volte tali soltanto perché male impostate) come quella del postulato delle parallele. In questo ordine di idee l'ideale logico di una teoria matematica sarebbe quello di una teoria in cui: *a*) ogni ente che compare nella trattazione è dato come ente primitivo (che si rinuncia a definire) oppure definito per mezzo degli enti primitivi; ed è desiderabile che i concetti primitivi siano nel minor numero possibile; *b*) ogni proposizione sia dimostrata, oppure enunciata esplicitamente tra i postulati (non vi siano cioè postulati « nascosti » o « involontari »); e tali postulati siano compatibili ed indipendenti tra loro nel senso spiegato sopra a proposito del V postulato di Euclide.

Si ottengono così delle teorie matematiche di grande astrattezza e generalità, nelle quali molte volte ci si discosta notevolmente da quelli che possono essere i suggerimenti della intuizione, ed il rigore logico viene ottenuto talvolta a spese della facile comprensione. Tuttavia vengono in compenso spesso evitati i paralogismi e le dimostrazioni illusorie, più suggerite da una ingenua intuizione che confortate da valide deduzioni.

Non possiamo addentrarci in particolari al riguardo; ricordiamo qui soltanto a titolo di esempio la trattazione assiomatica data da G. Peano all'aritmetica, fondata su tre concetti primitivi e cinque postulati.

Bibl.: G. Peano, *I principî di geometria logicamente esposti*, Torino 1889; F. Enriques, *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, 2 voll., Roma 1925; D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7ª ed., Lipsia 1930; G. Fano, *G. non e.*, Bologna 1935; G. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, 6 voll., Neuchâtel 1945-55; H. E. Wolfe, *Introduction to non-Euclidean Geometry*, Nuova York 1954.

C. F. Manara